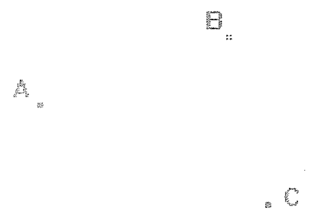
Vektoren – Wiederholung 1M

Definitionen :

- Ein **Vektor** ist ein mathematisches Objekt, das bestimmt ist durch *Richtung* (direction), *Orientierung* (sens) und *Länge* (longueur), wobei die *Länge* eines Vektors als **Betrag** bezeichnet wird. Vektoren werden durch *Pfeile* repräsentiert.
- Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie dieselbe Richtung, dieselbe Orientierung und dieselbe Länge besitzen.
- Zwei Vektoren heissen **kollinear**, wenn sie dieselbe Richtung haben.

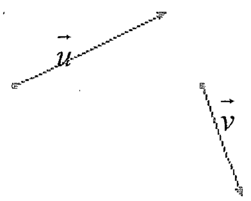


Zeichne in die Figur rechts die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ *und* $\overrightarrow{CB}$ *ein.*
Zeichne ausserdem zwei Vektoren $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$*, so dass gilt:*
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

Rechenoperationen mit Vektoren :

- **Der Gegenvektor** eines Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$: Schreibweise „$-\vec{u}$", wobei gilt $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, das heisst $-\vec{u}$ besitzt *dieselbe* Richtung und *dieselbe* Länge wie $\vec{u}$, ist aber *entgegengesetzt orientiert.*
- **Die Vektorsumme** : Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden addiert ($\vec{u} + \vec{v}$), indem man ihre Pfeile (Repräsentanten der Vektoren) 'aneinanderfügt', d.h. der Anfangspunkt von $\vec{v}$ wird an die Spitze des Vektors $\vec{u}$ angelegt. Anschliessend wird der Anfangspunkt von $\vec{u}$ mit der Spitze von $\vec{v}$ verbunden; dieser so entstandene Vektor entspricht der Summe $\vec{u} + \vec{v}$. (Dreiecksregel)
  Ist $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ und $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$, dann gilt: $(\vec{u} + \vec{v}) = \binom{u_1+v_1}{u_2+v_2}$.
- **Die Vektordifferenz** : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$ (Addition des Gegenvektors !). Häufig werden für die Differenz zweier Vektoren die Anfangspunkte der Pfeile aneinandergelegt. Die Differenz $\vec{u} - \vec{v}$ entspricht dann dem Vektor, der von der Spitze von $\vec{v}$ zur Spitze von $\vec{u}$ reicht.
  Es gilt: $(\vec{u} - \vec{v}) = \binom{u_1-v_1}{u_2-v_2}$.
- **Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl k** : $k\vec{u}$ ist ein Vektor, der die gleiche Richtung hat wie $\vec{u}$. Für positive k hat $k\vec{u}$ auch dieselbe Orientierung wie $\vec{u}$, für negative k hat er die entgegengesetzte Orientierung, d.h. die Pfeilspitze zeigt in die andere Richtung als bei $\vec{u}$. Ausserdem besitzt der Vektor $k\vec{u}$ den $|k|$-fachen Betrag von $\vec{u}$.

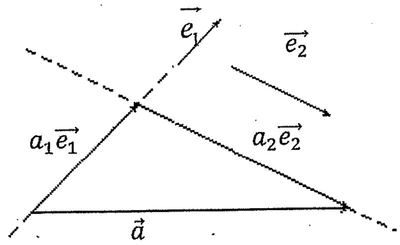
Konstruiere in der Figur rechts die folgenden Vektoren: $\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{v}$, $-2\vec{u}$, $\vec{u} - \vec{v}$.



Komponenten eines Vektors (composantes vectorielles), Basis :

Man sagt, zwei Vektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ bilden eine ***Basis*** für die Vektoren in der Ebene, wenn sich jeder Vektor $\vec{a}$ der Ebene als ***Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ darstellen lässt.***

Ein Vektor $\vec{a}$ heisst Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, wenn es eindeutig bestimmte Zahlen a_1 und a_2 gibt, so dass $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$ gilt. Die reellen Zahlen a_1 und a_2 werden als **Komponenten von $\vec{a}$** bezüglich der Basis $\left(\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ bezeichnet.



Folgerung : Sind in der Ebene zwei Vektoren *nicht kollinear,* so bilden sie eine Basis.

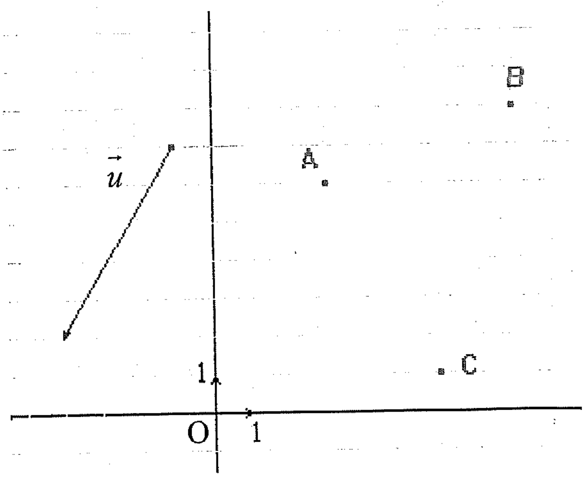
Koordinatensystem (un repère) : Ein **Koordinatensystem** der Ebene besteht aus einem festen Punkt O, dem Ursprung, und einer Basis $\left(\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ Gilt für die Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, dass sie orthogonal sind ($\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$) und dass es sogenannte *Einheitsvektoren* sind (d.h. $|e_1| = |e_2| = 1$, man sagt auch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sind *normiert*), dann spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem** und $\left(\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ wird als **orthonormierte Basis** bezeichnet.

Bemerkungen :

- Berechnung der Komponenten eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit $A(a_1; a_2)$ und $B(b_1; b_2)$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
- Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Komponenten übereinstimmen.

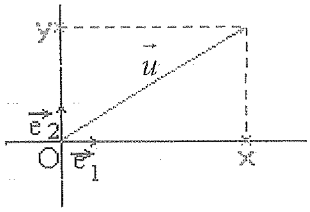
Bestimme in der Figur rechts die Komponenten der folgenden Vektoren:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ *und* $\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$



Der Betrag eines Vektors (norme d'un vecteur) in einem kartesischen Koordinatensystem :

Der Betrag eines Vektors $\vec{u}$ wird geschrieben als $\|\vec{u}\|$. Gilt $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dann folgt für den Betrag von $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gegeben sind die Punkte $A(3\,;-2), B(1\,;3)$ *und der Vektor* $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Für den Betrag der Vektoren* $\vec{u}$ *und* $\overrightarrow{AB}$ *gilt dann :*

$\|\vec{u}\| =$ .... $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \text{.........} \\ \text{.........} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{.....} \\ \text{.....} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| =$ ....

Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke :

Der Mittelpunkt M der Strecke AB besitzt die Koordinaten : $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Beispiel :

Bestimme den Mittelpunkt M von AB mit $A = (5; -4)$ und $B = (9; 2)$.

=>

Kollineare Vektoren (vecteurs colinéaires) :

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren ungleich Null.

- $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann kollinear, wenn es eine reelle Zahl k gibt, so dass gilt: $\vec{u} = k.\vec{v}$
- $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann kollinear, wenn gilt : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$
  (d.h. die aus den Komponenten der Vektoren gebildete Determinante ist gleich Null)
  Beachte die folgenden gleichbedeutenden Darstellungen $\left(\text{mit } \vec{u} = \binom{u_1}{u_2} \text{ und } \vec{v} = \binom{v_1}{v_2}\right)$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$$

Prüfe nach, welche der folgenden Vektoren kollinear sind : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{s}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

....

....

Für welchen Wert von m sind die folgenden Vektoren kollinear : $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

....

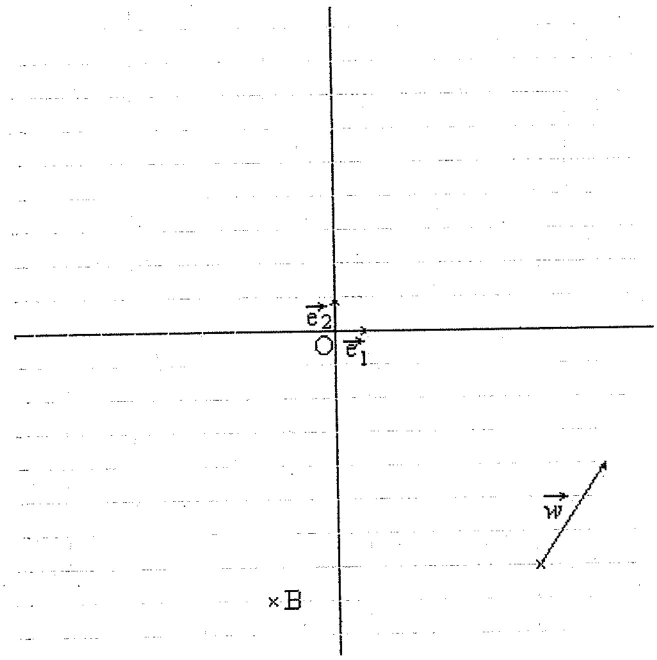
....

Vermischte Übungen :

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem $\left(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\right)$. Ausserdem sind gegeben die Punkte $A(1;-2)$ und B *(vergleiche Figur rechts),*

sowie die Vektoren $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=-2\vec{e_1}-2\vec{e_2}$ und

$\vec{w}$ *(vgl. Figur rechts)*



1) Zeichne in die Figur rechts den Punkt A, sowie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein.

2) Bestimme die Koordinaten des Punktes B, sowie die Komponenten des Vektors $\vec{w}$.

3) Berechne die Länge der Strecke [AB].

4) Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB.

5) Berechne den Betrag der Vektoren $\vec{u}$, $-\vec{u}$ et $3\vec{u}$.

6) Zeichne in die Figur rechts die folgenden Vektoren ein : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ und $-\frac{3}{2}\vec{v}$.

7) Zeichne in die Figur rechts den Vektor $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$ mit Punkt B als Anfangspunkt.

8) Bestimme die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $3.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BA}$.

9) Bestimme die Koordinaten des Punkts M, so dass gilt: M liegt der auf der Strecke AB und der Punkt B ist dreimal soweit von A entfernt wie der Punkt M.

10) Bestimme die Koordinaten des Punkts C, so dass OABC ein Parallelogramm ist..

11) Sind die Vektoren $\vec{w}$ und $\overrightarrow{AB}$ kollinear ? Begründe deine Antwort.

12) Sei $D(x;1)$. Für welchen Wert von x liegen die Punkte A, B und D auf einer Geraden?

13) Bestimme die Komponenten eines Vektors, der orthogonal zu $\vec{u}$ ist.

Lösungen :

2) $B(-2;-8)$ Komponenten von $\vec{w}$: $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

3) $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=3\sqrt{5}$ **4)** $\left(-\frac{1}{2};-5\right)$ **5)** $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{10}$ $\left\|-\vec{u}\right\|=\sqrt{10}$ $\left\|3\vec{u}\right\|=3\cdot\sqrt{10}$

8) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ $3.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-18\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ **9)** $M(0;-4)$ **10)** $C(-3;-6)$

11) nein **12)** $x=\frac{5}{2}$ **13)** zum Beispiel $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt

Der Name **Skalarprodukt** weist darauf hin, dass das so definierte **Produkt zweier Vektoren** ein Skalar, also eine **reelle Zahl** ist.

Definition :

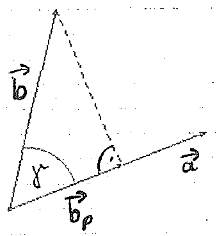
Seien die Vektoren $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben. Dann lässt sich das **Skalarprodukt** aus den Komponenten dieser Vektoren wie folgt berechnen:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Wichtig: Das Skalarprodukt zweier Vektoren, mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$, ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0}$$

Ausserdem gilt : $\vec{a} \bullet \vec{b} > 0 \Leftrightarrow$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist spitz (also $0° \leq \gamma < 90°$)
$\vec{a} \bullet \vec{b} < 0 \Leftrightarrow$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist stumpf (also $90° < \gamma \leq 180°$)



wobei $\overrightarrow{b_P}$ die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ darstellt

Winkel zwischen zwei Vektoren :

Für den Winkel γ zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ in der Ebene gilt :

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)}$$

Beispiel : Bestimme den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \binom{4}{-3}$ und $\vec{b} = \binom{1}{2}$.

$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ mit $\vec{a} \bullet \vec{b} =$ ....

$\|\vec{a}\| =$ .... $\|\vec{b}\| =$ ....

$\Rightarrow \cos\gamma =$

also $\gamma =$

Aufgaben

I/ Welches Vorzeichen hat das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt:
1) $\vec{a}$ und b sind kollinear und gleichorientiert,
2) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear und entgegengesetzt orientiert.

II/ Berechne jeweils das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und gib an, ob die Vektoren orthogonal sind beziehungsweise ob der eingeschlossene Winkel γ spitz oder stumpf ist.

1) $\vec{u} = (3; -2), \vec{v} = (4; 6)$ **2)** $\vec{u} = (-2; -3), \vec{v} = (5; -6)$

3) $\vec{u} = (-2; 1), \vec{v} = (1; -1)$ **4)** $\vec{u} = (-3; 4), \vec{v} = (9; -12)$

III/ Für alle folgenden Aufgaben befindet man sich in einem kartesischen Koordinatensystem.

1) Gegeben sind die Punkte $A(-4; -3), B(2; 0), C(0; 4)$. Sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ orthogonal?

2) Sind die Vektoren $\vec{u} = \binom{-5}{2}$ und $\vec{v} = \binom{3}{4}$ orthogonal?

3) Für welchen Wert von λ ist der Vektor $\vec{b} = \binom{2}{\lambda}$ orthogonal zum Vektor $\vec{a} = \binom{3}{-8}$?

4) Berechne den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{u} = \binom{3}{-4}$ und $\vec{v} = \binom{1}{1}$.

5) Die Punkte $A(1; 2), B(2; 0), C(5; 2)$ bilden ein Dreieck. Berechne den Winkel β in B.

Lösungen

II/ **1)** 0 ; orthogonal **2)** 8 ; spitzer Winkel
3) -3 ; stumpfer Winkel **4)** -75 ; Vektoren sind kollinear, 180° Winkel

III/ **1)** Ja **2)** Nein **3)** $\lambda = \frac{3}{4}$ **4)** $\alpha \cong 98{,}13°$
5) $\beta \cong 82{,}87°$

Geraden in der Ebene

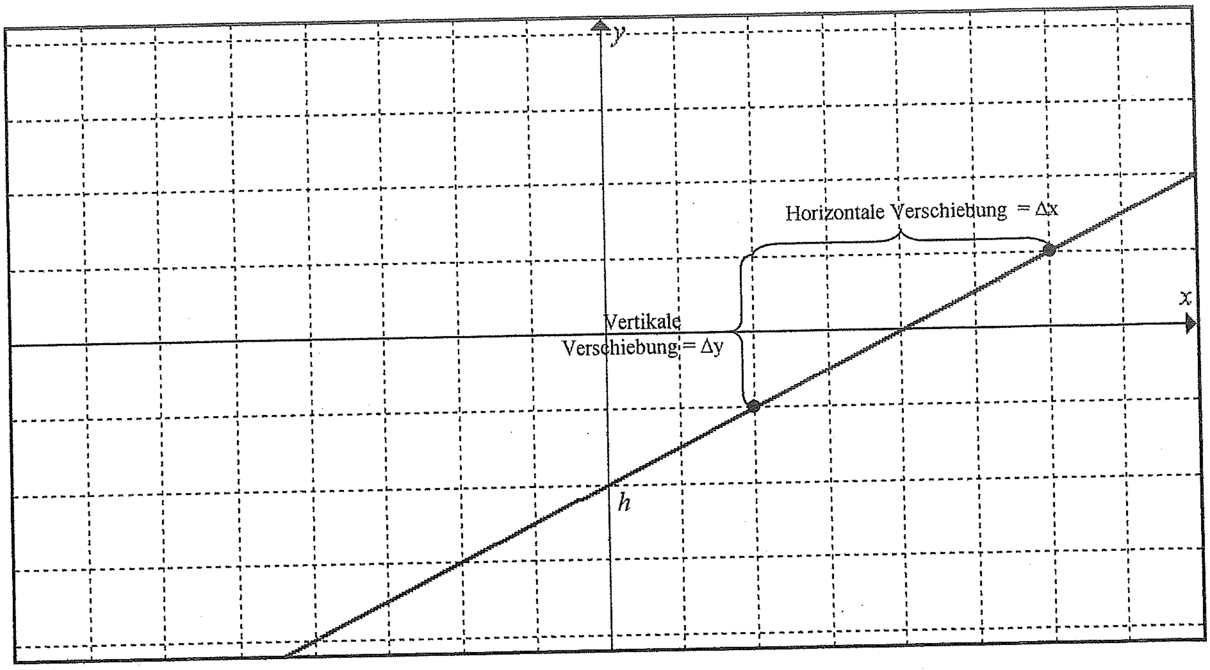
I/ Graphische Annäherung

Am Graph einer Geraden kann man die Steigung m und den y-Achsenabschnitt h der Geraden ablesen. Mit diesen beiden Informationen kann die sogenannte *Hauptform der Geradengleichung* $y = m.x + h$ aufgestellt werden.

➔ h ist die y-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der y-Achse.

➔ m berechnet sich durch $m = \frac{vertikale\ Verschiebung}{horizontale\ Verschiebung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen 2 Punkten der Geraden

($m > 0$ falls die Gerade steigt, $m < 0$ falls die Gerade fällt)

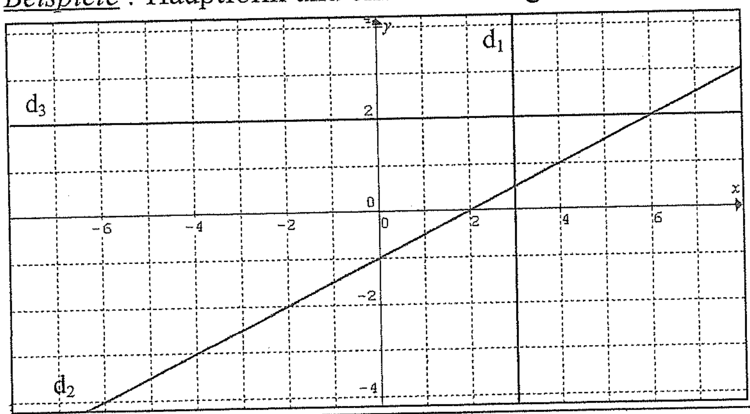


Sonderfall :

Eine **horizontale Gerade** durch einen Punkt (0/*b*), besitzt die Gleichung $y = b$.
Eine **vertikale Gerade** durch eine Punkt (a/0) besitzt die Gleichung $x = a$.

Richtungsvektor: ein Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden ergibt sich aus $\vec{v} = \begin{pmatrix} horizontale\ Verschiebung \\ vertikale\ Verschiebung \end{pmatrix}$.

Beispiele : Hauptform und einen Richtungsvektor einer Geraden bestimmen.



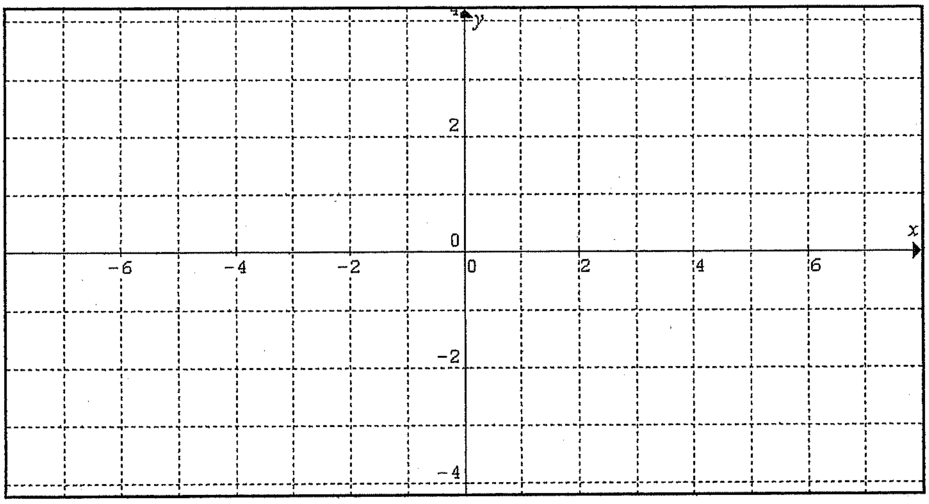
(d_1) :......................z.B.: $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$

(d_2) :......................z.B.: $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$

(d_3) :......................z.B.: $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$

Beispiele : Zeichnen einer Geraden mit Hilfe der Hauptform

$y = 2x - 3$
$y = -x + 1$
$y = -2$
$x = -3$



II/ Algebraische Annäherung

	Parametergleichung einer Geraden	**Koordinatengleichung einer Geraden**	**Hauptform der Geradengleichung** (Funktionsgleichung)
allgemeine Form Beispiele :	$\begin{cases} x = x_A + k.v_1 \\ y = y_A + k.v_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases}$	$ax + by + c = 0$ $2x - 3y + 7 = 0$	$y = mx + h$ $y = -\frac{1}{3}x + 6$
daraus direkt ablesbar :	ein Punkt (x_A ; y_A) ein Richtungsvektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ A (−3 ; 1) , $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	ein Richtungsvektor $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	die Steigung m y-Achsenabschnitt h Steigung = $-\frac{1}{3}$, y-Koord.= 6
bestimmen von Punkten:	den Parameter k durch eine beliebige Zahl ersetzen mit $k = 2$: $x = 1$ und $y = -1$ also B(1 ; −1)	Man legt für x (oder y) einen Wert fest und berechnet den entsprechenden y (bzw. x) Wert mit $y = 1$: $x = -2$ also B(−2 ; 1)	mit $x = 3$: $y = 5$ also B(3 ; 5)

Zusammenfassung

Koordinatengleichung
(es gibt unendliche viele für eine Gerade!)

$$a\,x+b\,y+c=0$$

Vorteile :

Man kann die Koordinaten eines Richtungsvektors ablesen $\vec{v}=\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$
und die Koordinaten eines Normalenvektors $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Beide Gleichungen nach k umformen, danach die erhaltenen Terme gleichsetzen und Umformen
(Weg 1)

Bestimmen der Koordinaten eines Richtungsvektors (siehe oben) ;
Für die Koordinaten $(x;y)$ eines Punktes A, setzt man einen beliebigen x-Wert in die Gleichung ein und berechnet damit y

Paramtergleichung
(es gibt unendlich viele für eine Gerade!)

$$\begin{cases} x = x_A + v_1 \cdot k \\ y = y_A + v_2 \cdot k \end{cases}$$

Vorteile :

direktes Ablesen der Koordinaten eines Punktes $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A})$
sowie der Komponenten eines Richtungsvektors $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Alles auf eine Seite bringen

Nach y auflösen
(Weg 2)

Bestimmen der Koordinaten eines Richtungsvektors (siehe oben) ;
Für die Koordinaten $(x;y)$ eines Punktes A, setzt man einen beliebigen x-Wert in die Gleichung ein und berechnet damit$_{(x;y)}$

Es gibt keinen direkten Weg ; zuerst Weg 1, dann Weg 2 ausführen

Hauptform (Funktionsgleichung)
(es gibt nur eine einzige für jede Gerade!)

$$y=m\,x+h$$

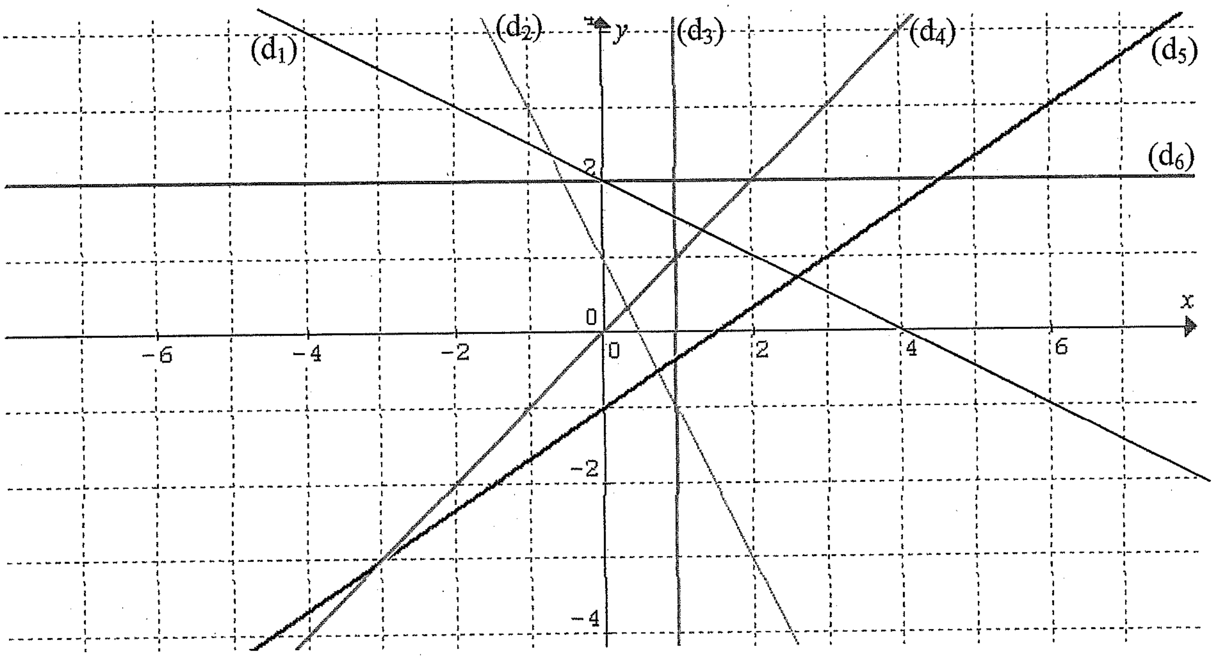
Vorteile :

Direktes Ablesen der Steigung m
und des y-Achsenabschnitts h

Geraden in der Ebene
Aufgaben

Aufgabe 1 :

Bestimme die Gleichungen der unten abgebildeten Geraden:



(d_1) .... (d_2) ....

(d_3) .... (d_4) ....

(d_5) .... (d_6) ....

Aufgabe 2 :

Zeichne die Geraden (d_1) bis (d_7) in das vorgegebene Koordinatensystem ein.

(d_1) $y=-3x+3$

(d_2) $y=\frac{1}{3}x-2$

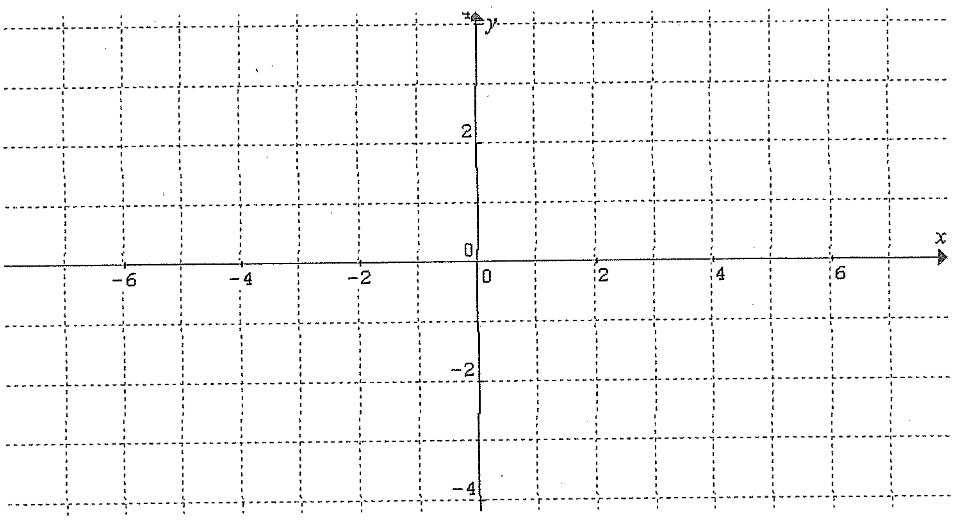
(d_3) $y=x+1$

(d_4) $x=2$

(d_5) $y=3$

(d_6) durch $A(4;1)$ und mit Richtungsvektor $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(d_7) durch die Punkte $B(-1;2)$ und $C(1;-2)$



Aufgabe 3 :

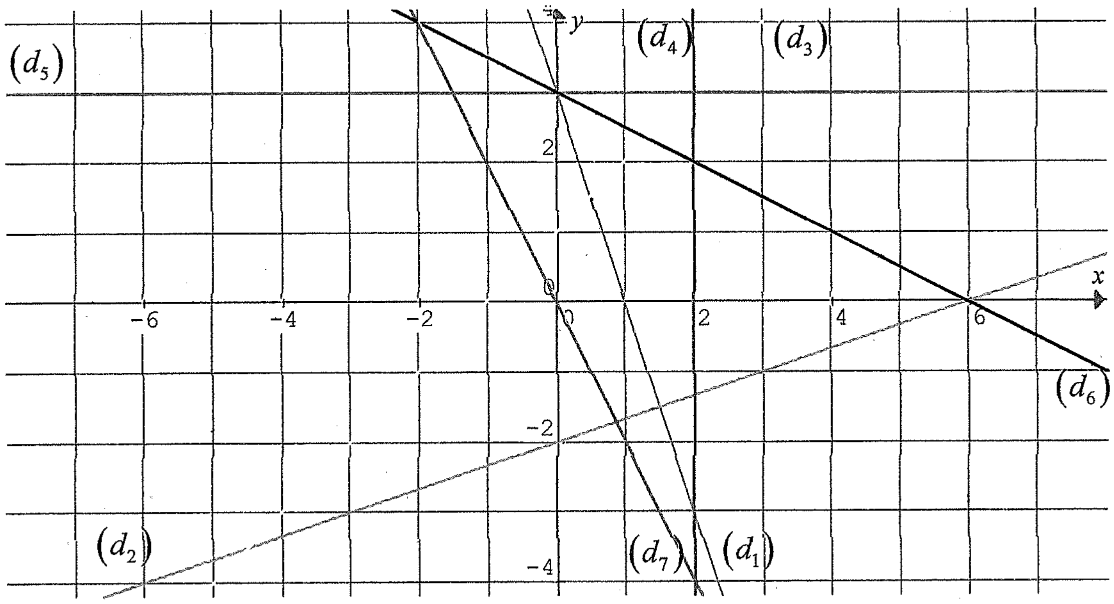
Vervollständige die folgende Tabelle :

	d_1	d_2	d_3	d_4
Paramtergleichungen	$\begin{cases} x = 5 - 3\,k \\ y = -1 + k \end{cases}$			
Koordinatengleichung		$x - 2\,y - 8 = 0$		
Hauptform			$y = -\frac{3}{4}x + 2$	
Richtungsvektor				
Normalenvektor				
Steigung m				$\frac{1}{3}$
y-Achsenabschnitt				-7
Punkt mit x ≠ 0				

Lösungen

A 1 : $(d_1): y=-\frac{1}{2}x+2, (d_2): y=-2x+1, (d_3): x=1, (d_4): y=x, (d_5): y=\frac{2}{3}x-1, (d_6): y=2$

A 2 :



A 3 :

	d_1	d_2	d_3	d_4
**Paramtergl.	$\begin{cases} x=5-3k \\ y=-1+k \end{cases}$	$\begin{cases} x=2k \\ y=-4+k \end{cases}$	$\begin{cases} x=-4k \\ y=2+3k \end{cases}$	$\begin{cases} x=3k \\ y=-7+k \end{cases}$
*Koordinatengl. z.B.	$x+3y-2=0$	$x-2y-8=0$	$3x+4y-8=0$	$x-3y-21=0$
Hauptform	$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$	$y=\frac{1}{2}x-4$	$y=-\frac{3}{4}x+2$	$y=\frac{1}{3}x-7$
*Richtungsvektor z.B.	$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
*Normalenvektor z.B.	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
Steigung m	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$
y-Achsenabschnitt	$\frac{2}{3}$	-4	2	-7
**Punkt mit x≠0	$(5;-1)$	$(8;0)$	$(4;-1)$	$(3;-6)$

<u>Bemerkungen</u>:

- für * gibt es unendlich viele Ergebnisse. Die einzelnen Ergebnisse sind Vielfache voneinander.
- für ** gibt es unendlich viele Ergebnisse.

2.11.

6. DIE GERADE

a) Die Gerade in der Grundebene

1. Zeichne die Gerade und bestimme ihre Koordinatengleichung.
   Die Gerade geht
   a) durch A(4/7) und hat die Steigung $m = 3$;
   b) durch A(-2/1) und B(5/3);
   c) durch A(5/-2) und schneidet die y-Achse bei $y = 4$;
   d) durch A(-3/-7) und ist parallel zur y-Achse;
   e) durch A(8/-5) und ist parallel zur x-Achse.

2. Sind die Geraden g und h parallel ?
   a) g: $3x - 4y + 5 = 0$, h: $y = \frac{3}{4}x - 4$
   b) g: $3x - 5y + 4 = 0$, h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Liegen P(3/4) und Q(21/15) auf der Geraden, die durch A(-3/0) und die Steigung $m = \frac{2}{3}$ bestimmt ist ?

4. Bestimme die Koordinatengleichung der Geraden, die durch P(4/-5) geht und parallel ist zur Geraden
   a) g: $5x - 2y + 4 = 0$, b) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Die parallelen Geraden g und h sind gegeben. Wie heisst die Koordinatengleichung ihrer Mittelparallelen ?
   a) g: $3x - 2y + 4 = 0$, h: $6x - 4y - 3 = 0$
   b) g: $2x - 3y + 12 = 0$, h: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$
   c) g: $y = \frac{1}{3}x - 4$, h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Bestimme den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.
   a) g: $y = 4x - 7$, h: $y = 7x - 4$
   b) g: $y = -x - 3$, h: $y = 2x + 6$
   c) g: $2x - 3y - 3 = 0$, h: $3x + 2y - 24 = 0$
   d) g: $5x + 2y + 36 = 0$, h: $5x - 2y + 4 = 0$
   e) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   f) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungen:

6. Die Gerade

1a) $3x - y - 5 = 0$
b) $2x - 7y + 11$ 0 0
c) $6x + 5y - 20 = 0$
d) $x + 3 = 0$
e) $y + 5 = 0$

2a) ja
b) ja

3. P ja, Q nein

4a) $5x - 2y - 30 = 0$
b) $3x + y - 7 = 0$

5a) $12x - 8y + 5 = 0$
b) $8x - 12y + 21 = 0$
c) $x - 3y - 5 = 0$

6a) S(-1/-11); 5,91°
b) S(-3/0); 71,57°
c) S(6/3); 90°
d) S(-4/-8); 43,60°
e) S(6/7); 75,96°
f) g || h

Aus: Erhard Rhyn, Trigonometrie und Vektorgeometrie

Aufstellen von Geradengleichungen
Gemischte Aufgaben

Es wird empfohlen, für alle Aufgaben eine Skizze zu machen!

Aufgabe 1:
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 2), B(3; -1) und C(4; 0) gegeben.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung
a1) der Geraden (AB)
a2) der Geraden (0A)

b) Bestimme eine Paramtergleichung der Geraden (BC).

c) Bestimme eine Koordinatengleichung
c1) der Geraden durch A parallel zur Geraden (BC)
c2) der Geraden durch B orthogonal zur Geraden (AC)
c3) der Geraden durch A mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Wie lauten die Parametergleichungen?
c4) der Geraden durch A mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

d) Bestimme eine Koordinatengleichung
d1) der Geraden durch A parallel zur x-Achse
d2) der Geraden durch B orthogonal zur x-Achse

e) Gesucht ist die Gleichung für die Menge aller Punkte, für die gilt: Jeder Punkt dieser Menge ist gleich weit entfernt von Punkt B wie von Punkt C.

f) Bestimme die Koordinatengleichung
f1) der Geraden durch A und parallel zur Geraden mit der Gleichung $x + 2y - 3 = 0$.
f2) der Geraden durch B und orthogonal zur Geraden mit der Gleichung $x + 2y - 3 = 0$.
f3) der Geraden durch B und durch den Mittelpunkt der Strecke AC .

g) Bestimme eine Koordinatengleichung
g1) der Geraden durch A und parallel zur Geraden mit den Parametergleichungen $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - k \end{cases}$

g2) der Geraden durch C und orthogonal zur Geraden mit den Parametergleichungen $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases}$

Aufgabe 2 :

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;-2)$, $B(3;-1)$ und $C(1;0)$ gegeben.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung

a) der Geraden (AD), so dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) der Geraden (EE'), so dass AEBE' ein Quadrat ist.

c) der Geraden (AF), so dass ABF ein in A rechtwinkliges Dreieck ist.

d) der Geraden durch einen Punkt G, so dass ABG ein gleichschenkliges Dreieck bezüglich G ist und diese Gerade durch die Mitte der Seite $[AB]$ geht.

e) der Geraden (BJ), so dass ABJL ein Rechteck ist.

Analytische Geometrie 5

Lösungen:

Aufgabe 1 :

a1) $3x+2y-7=0$ **a2)** $2x-y=0$ **b)** $\begin{cases} x=3+k \\ y=-1+k \end{cases}$ **c1)** $x-y+1=0$ **c2)** $3x-2y-11=0$

c3) $2x-y=0$ und $\begin{cases} x=1+k \\ y=2+2k \end{cases}$ **c4)** $3x+2y-7=0$ **d1)** $y-2=0$ **d2)** $x=3$ **e)** $x+y-3=0$

f1) $x+2y-5=0$ **f2)** $2x-y-7=0$ **f3)** $4x+y-11=0$ **g1)** $x-1=0$ **g2)** $2x-y-8=0$

Aufgabe 2 :

a) $x+2y+3=0$ **b)** $4x+2y-5=0$ **c)** $2x+y=0$ **d)** $4x+2y-5=0$ **e)** $2x+y-5=0$

Schnittwinkel zweier Geraden

Wichtiger Hinweis:

Der **Schnittwinkel zweier Geraden** ist <u>immer</u> der ***spitze* Winkel** α, also $0° \leq \alpha \leq 90°$, zwischen den beiden Geraden.

Der Schnittwinkel zweier Geraden kann mit folgenden Methoden berechnet werden:

- Mit Hilfe der Steigungen (**Methode 1**) ;
- Mit Hilfe des Skalarprodukts (**Methode 2**).

Methode 1: 1. Die Steigung m_1 der Geraden g und die Steigung m_2 der Geraden h bestimmen.

2. Den spitzen Zwischenwinkel α der beiden Geraden mit der Formel

$$\tan(\alpha) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

berechnen.

Methode 2: 1. Richtungsvektoren $\overrightarrow{v_g}$ und $\overrightarrow{v_h}$ (oder Normalenvektoren $\overrightarrow{n_g}$ und $\overrightarrow{n_h}$) der beiden Geraden g und h bestimmen.

2. Das Skalarprodukt $\overrightarrow{v_g} \cdot \overrightarrow{v_h}$ (bzw. $\overrightarrow{n_g} \cdot \overrightarrow{n_h}$) sowie $\|\overrightarrow{v_g}\|$ und $\|\overrightarrow{v_h}\|$ (bzw. $\|\overrightarrow{n_g}\|$ und $\|\overrightarrow{n_h}\|$) berechnen.

3. Den Winkel mit der Formel

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{v_g} \cdot \overrightarrow{v_h}}{\|\overrightarrow{v_g}\| \cdot \|\overrightarrow{v_h}\|}$$

berechnen. **Beachte:** ist das Skalarprodukt negativ, also $\overrightarrow{v_g} \cdot \overrightarrow{v_h} < 0$, dann ist der berechnete Winkel <u>nicht</u> der Schnittwinkel α! Es gilt: $\alpha = 180° - \gamma$!

Beide Formeln finden Sie auch in der Formelsammlung!

Aufgaben: Berechnen Sie jede Aufgabe mit beiden Methoden!

1) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g: y = 0{,}5x + 1$ und $h: -3x + 2y + 2 = 0$.

2) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g: 2x - y = 3$ und $h: y = -x + 3$.

Übungen: Die Aufgaben sollen nur mit einer Methode (Methode 1 oder Methode 2) gelöst werden.

Kopien E.Rhyn, Die Gerade: Nr. 6

Lagebeziehungen zweier Geraden

Übungen

Aus: Lambacher Schweizer; Analysis, Grundkurs

2 Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.

a) g: $2x - y = 3$, h: $x + y = 3$ b) g: $3x - 4y = 27$, h: $x - y = 8$ c) g: $4x - 5y - 8 = 0$, h: $5x + 4y + 31 = 0$ d) g: $y = 5x + 8$, h: $8x - 2y + 13 = 0$

3 Prüfen Sie rechnerisch, ob die Geraden g und h einen Schnittpunkt haben, parallel sind oder sogar zusammenfallen.

a) g: $3x - 4y + 25 = 0$, h: $4y = 3x - 10$ b) g: $4y = 3x + 14$, h: $3x + 4y - 26 = 0$ c) g: $0{,}2x - 0{,}5y = 1$, h: $0{,}5x - 1{,}25y = 2{,}5$ d) g: $\sqrt{2}x - y = 1$, h: $2x - \sqrt{2}y = 1$

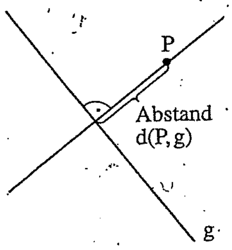


Fig. 1

4 Prüfen Sie, ob die Geraden g, h und k durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

a) g: $y = x - 1$; h: $y = 2x - 3$; k: $y + x = 3$

b) g: $4y = 4x + 1$; h: $2y = x + 1$; k: $6x - 10y + 5 = 0$

c) g: $\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} + 1$; h: $\sqrt{2}x + y = 2\sqrt{2} - 1$; k: $2\sqrt{2}x - y = 4\sqrt{2} + 1$

5 Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) g: $3x + 4y = 36$; $P(1|2)$ b) g: $4x + 5y = 6$; $P(2{,}4|-3{,}2)$

c) g: $y = -2x + 1$; $P(3|2)$ d) g: $2x + 2y + 1 = 0$; $P(7|3)$

6 Wie groß sind die drei Innenwinkel des Dreiecks ABC? (Runden Sie auf 1 Dezimale.)

a) $A(0|0)$, $B(4|1)$, $C(2|6)$ b) $A(2|0)$, $B(1|4)$, $C(-1|1)$

Lösungen:

6 a) $m_{\overline{AB}} = 0{,}25$ (14,04°); $m_{\overline{BC}} = -2{,}5$ (111,80°); $m_{\overline{AC}} = 3$ (71,57°)

$\alpha \approx 71{,}07° - 14{,}04° = 57{,}5°$

$\beta = (180° - 111{,}80°) + 14{,}04° = 82{,}24°$

$\gamma = 111{,}80° - 71{,}57° = 40{,}2°$

b) $m_{\overline{AB}} = -4$ (104,4°); $m_{\overline{BC}} = 1{,}5$ (56,31°); $m_{\overline{AC}} = -\frac{1}{3}$ (161,57°)

$\alpha \approx 161{,}57° - 104{,}4° = 57{,}5°$

$\beta = 104{,}4° - 56{,}31° = 47{,}7°$

$\gamma = (180° - 161{,}57°) + 56{,}31° = 74{,}7°$

5 a) Orthogonale h zu g durch P:

h: $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

Schnittpunkt S von h und g: $S(4|6)$

$\overline{SP} = 5$

b) Orthogonale h zu g durch P:

h: $y = \frac{5}{4}x - 6{,}2$

$S(\approx 3{,}61|\approx 1{,}69)$

$\overline{SP} \approx 1{,}93$

c) h: $y = 0{,}5x + 0{,}5$; $S(0{,}2|0{,}6)$

$\overline{SP} \approx 3{,}13$

d) h: $y = x - 4$; $S\left(\frac{7}{4}\middle|-\frac{9}{4}\right)$

$\overline{SP} = 7{,}42$

4 a) Schnittpunkt S von g und h:

$S(2|1)$

S liegt auch auf k.

b) Schnittpunkt S von g und h:

$S\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right)$

S liegt nicht auf k.

c) Schnittpunkt S von g und h:

$S(2|-1)$

S liegt auch auf k.

3 a) g: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

h: $y = \frac{3}{4}x - 2{,}5$

g und h sind parallel.

b) g: $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$

h: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$

$S(2|5)$

c) g: $y = \frac{2}{5}x - 2$

h: $y = \frac{2}{5}x - 2$

g und h fallen zusammen.

d) g: $y = \sqrt{2}x - 1$

h: $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

g und h sind parallel.

2 a) $S(2|1)$; $\delta = 71{,}6°$ b) $S(5|-3)$; $\delta = 8{,}1°$

c) $S(-3|-4)$; $\delta = 90°$ d) $S(-1{,}5|0{,}5)$; $\delta = 2{,}7°$

Abstand Punkt–Gerade in der Ebene

Definition: Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Ein Punkt P' heisst dann **orthogonale Projektion von P auf g**, wenn gilt:

$$PP' \perp g$$

P' wird auch **(Lot-)Fusspunkt** genannt.

Definition: Abstand eines Punktes von einer Geraden
Der **Abstand δ** eines Punktes P von einer Geraden g ist die Norm (d.h. die Länge) des Vektors $\overrightarrow{PP'}$, wobei P' die orthogonale Projektion von P auf g ist. (vgl. Skizze oben)

MERKE:

Ist eine Geraden g in der Ebene durch die Koordinatengleichung $ax + by + c = 0$ gegeben, dann lässt sich der **Abstand eines Punktes** $P(p_1; p_2)$ von dieser Geraden g mit der folgenden Formel bestimmen:

$$\boxed{\delta(P;g) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Beispiel:
Gesucht ist der Abstand des Punktes $P(-2;6)$ von der Geraden AB mit $A(0;-3)$ und $B(5;0)$.

Übungen

1) Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen dem gegebenen Punkt M und der Geraden d:

a) $M(3;2)$ $(d): 5x+12y=0$

b) $M(2;5)$ $(d): x=0$

c) $M(1;1)$ $(d): 2x-y-1=0$

d) $M(-1;2)$ $(d): y=3x+2$

e) $M(1;1)$ (d): Gerade durch $A(1;5)$ und $B(1;-3)$.

Tipp: Machen Sie für die Aufgaben 2b, 3 und 4 jeweils eine Skizze!

2) a) Bestimmen Sie $\delta(P;g)$ mit $P(1;-2)$ und $g: 3x-4y=6$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Geraden $h: x+y=1$, die von der Geraden g den Abstand 3 haben.

3) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Quadrats, dessen eine Ecke der Punkt $A(2;5)$ ist und dessen eine Seite auf der Geraden $g: x=2y+7$ liegt.

4) Gesucht sind die Gleichungen jener Geraden, die von der Geraden $4x-3y-8=0$ den Abstand 1 haben.

Lösungen

1) a) 3 **b)** 2 **c)** 0 **d)** $\frac{3}{\sqrt{10}}$ □ 0,95 **e)** 0

2a) $\delta=1$ b) $P_1\left(-\frac{5}{7};\frac{12}{7}\right), P_2\left(\frac{25}{7};-\frac{18}{7}\right)$

3) F = 45 4) $4x-3y-13=0$ und $4x-3y-3=0$

Geradengleichungen
Aufgaben

Alle Ergebnisse sind in Form ganzer Zahlen oder gekürzter Brüche bzw. Wurzeln zu liefern.

1. Berechnen Sie für die Geraden $\mathcal{G}_1 := (AB)$, $\mathcal{G}_2 := (AC)$ und $\mathcal{G}_3 = (BC)$ eine Parameterform, die Funktionsgleichung und eine Koordinatengleichung, wobei A, B und C so definiert sind :

   $$A = (2 \mid 3), \qquad B = (-1 \mid -6) \qquad C = (-5 \mid 2)$$

   Stellen Sie diese Geraden mit grösster Sorgfalt graphisch dar (Massstab 1 cm für eine Einheit).
2. Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden $\mathcal{G}_4$, die durch den Nullpunkt verläuft und senkrecht auf $\mathcal{G}_1$ steht.
3. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Geraden $\mathcal{G}_5$, die durch den Punkt B verläuft und senkrecht auf $\mathcal{G}_2$ steht.
4. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Geraden $\mathcal{G}_6$, die durch den Punkt A verläuft und senkrecht auf $\mathcal{G}_3$ steht.
5. Berechnen Sie die Abstände des Nullpunktes $O = (0 \mid 0)$ von allen Geraden $\mathcal{G}_1$ bis $\mathcal{G}_6$.
6. Sei $D := (2 \mid -2)$. Berechnen Sie die Abstände des Punktes D von allen Geraden $\mathcal{G}_1$ bis $\mathcal{G}_6$.
7. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC.
8. Bestimmen Sie den Schnittpunkt E von $\mathcal{G}_5$ und $\mathcal{G}_6$, den Schnittpunkt F von $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{G}_6$, den Schittpunkt G von $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_5$, den Schnittpunkt H von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_4$.
9. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes FGO.
10. Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Gerade $\mathcal{G}_7$, die durch die Punkte E und $K = (1 \mid 0)$ verläuft.
11. Bestimmen Sie den Schnittpunkt I von $\mathcal{G}_4$ und $\mathcal{G}_6$, den Schnittpunkt J von $\mathcal{G}_4$ und $\mathcal{G}_5$.
12. Beweisen Sie $\mathcal{G}_4 \mathbin{/\!/} \mathcal{G}_7$
13. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes EIJ.

Lösungen zu Geradengleichungen

1. $G_1: y = 3x - 3$ Hauptform

$3x - y - 3 = 0$ Koordinatengleichung

$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - 9t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ Parametergleichungen

$G_3: y = -2x - 8$

$2x + y + 8 = 0$

$\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -6 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$G_2: y = \frac{1}{7}x + \frac{19}{7}$

$x - 7y + 19 = 0$

$\begin{cases} x = 2 - 7t \\ y = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. $G_4: \begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3. $G_5: 7x + y + 13 = 0$

4. $G_6: y = \frac{1}{2}x + 2$

5. $\delta(O, G_1) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\delta(O, G_2) = \frac{19}{\sqrt{50}} = \frac{19\sqrt{2}}{10}$

$\delta(O, G_3) = \frac{8}{\sqrt{5}}$

$\delta(O, G_4) = 0$

$\delta(O, G_5) = \frac{13}{\sqrt{50}} = \frac{13}{50}\sqrt{50}$

$\delta(O, G_6) = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

6. $\delta(D, G_1) = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\delta(D, G_2) = \frac{35}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$\delta(D, G_3) = 2\sqrt{5}$

$\delta(D, G_4) = \frac{4}{\sqrt{10}}$

$\delta(D, G_5) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\delta(D, G_6) = 2\sqrt{5}$

7. $A_{\Delta ABC} = 30$ FE

8. $E = (-2 | 1)$

$F = (-4 | 0)$

$G = \left(-\frac{11}{5} \middle| \frac{12}{5}\right)$

$H = \left(\frac{9}{10} \middle| -\frac{3}{10}\right)$

9. $A_{\Delta FGO} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ FE

10. $G_7: x + 3y - 1 = 0$

11. $I = \left(-\frac{12}{5} \middle| \frac{4}{5}\right), J = \left(-\frac{39}{20} \middle| \frac{13}{20}\right)$

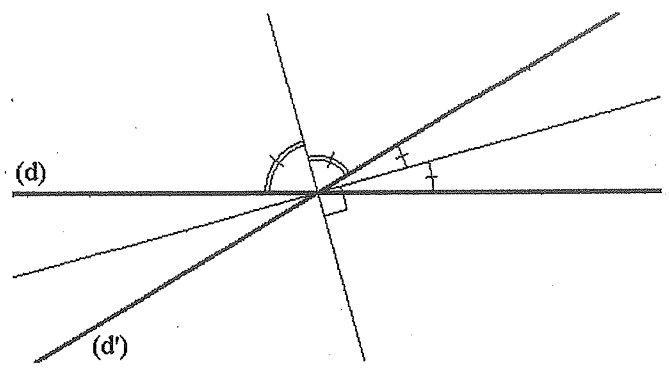
12. $\vec{n}_{G_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_{G_7} \Rightarrow G_4 \parallel G_7$

13. $A_{\Delta EIJ} = \frac{3}{50}$ FE

Gleichung einer Winkelhalbierenden

Eine **Winkelhalbierende von zwei Geraden** ist die **Menge aller Punkte für die gilt, dass sie den gleichen Abstand von beiden Geraden haben.**

Zwei sich schneidende Geraden haben *zwei* Winkelhalbierende: Eine halbiert den spitzen Schnittwinkel, die andere den stumpfen Schnittwinkel. Diese beiden Winkelhalbierenden stehen *senkrecht* aufeinander.



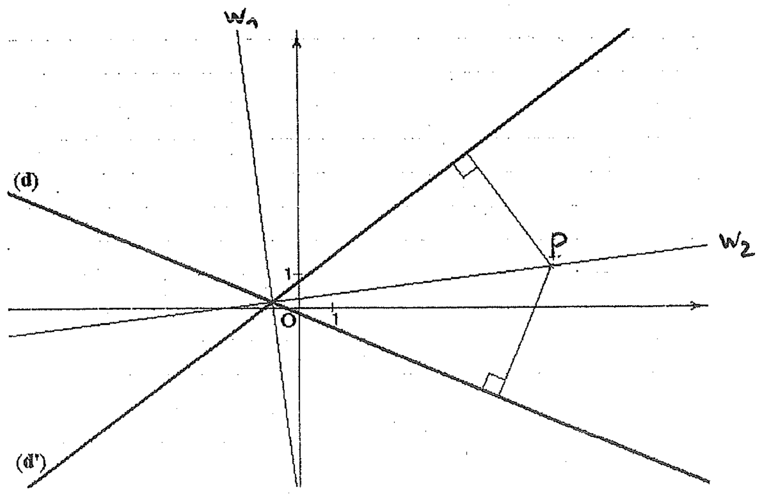
Gleichung einer Winkelhalbierenden

(Allgemeine Formel siehe Formelsammlung)

Beispiel:

Folgende Geraden (d) und (d') seien gegeben: (d): $5x + 12y + 2 = 0$ und
(d'): $3x - 4y + 3 = 0$.

Gesucht: Die Gleichungen der beiden Winkelhalbierenden von (w_1) und (w_2).



Lösung:

Sei $P(x;y)$ ein beweglicher Punkt auf einer der Winkelhalbierenden.

$\Rightarrow \quad \delta(P;d) = \delta(P;d') \quad \Rightarrow$

....

....

....

....

$\Rightarrow$ $\boxed{y =}$ oder $\boxed{y =}$

.... Winkel .... Winkel

Übungen:

1) Folgende zwei Geraden seien gegeben:

g: -4x + 3y – 60 = 0 und h: -5x – 12y + 240 = 0.

Bestimme die Gleichungen der beiden Winkelhalbierenden von g und h.

2) Berechne den Schnittwinkel δ der Geraden $g_1: y = 0{,}5x - 11$ und $g_2: 4y + 3x + 2 = 0$.

3) Untersuche die Lagebeziehungen der folgenden Geraden g_1, g_2, g_3 mit den Gleichungen:

$$g_1: y = 3x - 12, \qquad g_2: y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \qquad g_3: y = 3x - 2$$

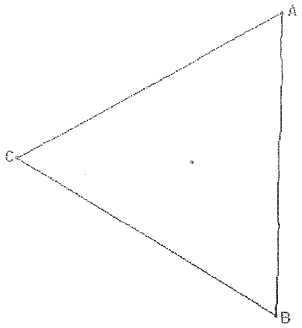
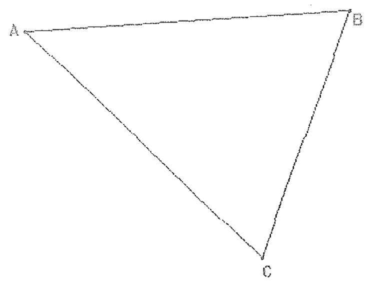
Lösungen:

1) $-3x+11y-220=0$ $\qquad -11x-3y+60=0$

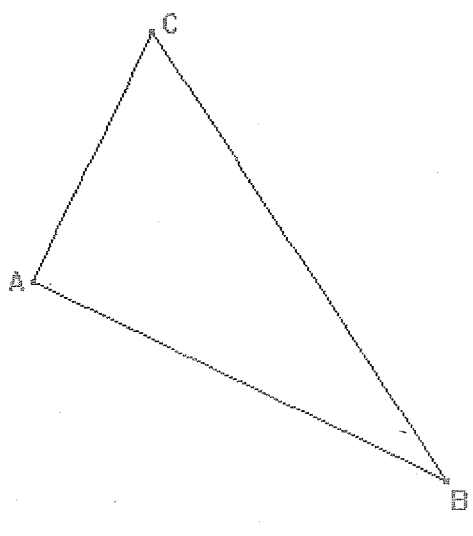
2) $\delta \approx 63{,}4°$

3) g_1 und g_2 sind orthogonal, da $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$; g_1 und g_3 sind parallel, da $m_1 = m_3$; g_2 und g_3 sind orthogonal, dies folgt aus den ersten beiden Beziehungen sowie aus $m_3 \cdot m_2 = -1$.

Besondere Linien im Dreieck
Sonderfälle

Gleichseitiges Dreieck (Triangle équilatéral)	**Gleichschenkliges Dreieck (AB = AC)** (Triangle isocèle)
	
Besondere Linien, die zusammenfallen	
....	....
....	....
....	....
....	....
Besondere Punkte, die zusammenfallen	
....	....
....	....
....	....
....	....

Rechtwinkliges Dreieck



Wo befindet sich das Orthozentrum?

....

Wo befindet sich der Umkreismittelpunkt?

....

Was weiss man über den Radius des Umkreises?

....

Übungen zu
Seitenhalbierenden-Mittelsenkrechten-Höhen und Winkelhalbierenden

I/ Das Dreieck ABC ist gegeben durch $A(5;2)$, $B(-1;3)$ und $C(3;-3)$.

1) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Seitenhalbierenden durch A.

2) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks ABC.

3) Bestimmen Sie auf zwei verschiedene Arten die Koordinatengleichung der Mittelsenkrechten von [BC].

4) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Höhe durch A.

II/ Das Dreieck ABC sei gegeben durch $A(3;2)$, $B(7;2)$ und $C(5;6)$.

1) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks ABC.

2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunkts des Dreiecks ABC und berechne den Radius dieses Umkreises.

3) Berechnen Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunkts (Orthozentrum) des Dreiecks ABC.

III/ Sei M_{BC} (-1; 2) die Mitte der Seite $[BC]$ des Dreiecks ABC und $G\left(-\frac{2}{3};1\right)$ sein Schwerpunkt.

1) Wie lauten die Koordinaten des Punktes A?

2) Bestimmen Sie mithilfe von $B(-4;2)$ die Koordinaten des Punktes C.

IV/ Gleiche Fragen wie bei **II/** aber mit $A(8;-12)$, $B(8;6)$ und $C(-16;-12)$.

V/ Sei ABC ein Dreieck mit $A(7;5)$, $B(7;-1)$ und $C(-1;-1)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen von zwei inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Inkreismittelpunktes I des Dreiecks ABC.
c) Berechnen Sie den Radius R dieses Kreises.

Lösungen :

I/ 1) $x-2y-1=0$ **2)** $G\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$ **3)** $2x-3y-2=0$ **4)** $2x-3y-4=0$

II/ 1) $G\left(5;\frac{10}{3}\right)$ **2)** $\Omega\left(5;\frac{7}{2}\right)$ $R=\frac{5}{2}$ **3)** $H(5;3)$

III/ 1) $A(0;-1)$ **2)** $C(2;2)$

IV/ 1) $G(0;-6)$ **2)** $\Omega(-4;-3)$ $R=15$ **3)** $H(8;-12)$

V/ a) $b_A: y=2x-9$ $b_B: y=-x+6$ $b_C: y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ **b)** $I(5;1)$ **c)** $R=2$